

Echantillonnage temporel

Introduction historique :

C'est en tant que préfet de l'Isère que Joseph Fourier (né en 1768 et mort en 1830) réalise l'essentiel de ses travaux portant sur l'étude de l'évolution de la chaleur dans les corps solides.

Afin de résoudre l'équation de propagation de la chaleur, il élabore une méthode, aujourd'hui bien connue sous le terme d'analyse de Fourier. Cela consiste à décomposer une fonction mathématique difficile à décrire mathématiquement en une somme infinie de fonctions sinus et cosinus.

Les séries et intégrales de Fourier sont des outils très puissants et se rencontrent dans l'étude des courants électriques, des ondes électromagnétiques, dans la synthèse sonore, le traitement du signal et plus particulièrement dans le domaine des télécommunications.

C'est, en effet grâce à l'analyse spectrale, que Harry Nyquist et Claude Shannon des laboratoires Bell ont pu poser les fondations de la théorie de l'information et déterminer à quelle vitesse on pouvait réaliser de la communication type téléphone. Ce critère est appelé théorème de l'échantillonnage. Il est aussi associé aux noms de Edmund Whittaker qui avait posé les bases de la démonstration et de Kotel'nikov qui avait introduit ce théorème dans la littérature scientifique russe en 1933.

Les travaux de Claude Shannon sur la théorie des télécommunications servent de fondements pour le développement de cette discipline.

En 1948, alors que tout le monde pense qu'une transmission sur un câble doit nécessairement utiliser un signal analogique, Claude Shannon publie une « théorie mathématique de la communication » dans laquelle il définit la notion d'information, en posant que tout message peut se résumer à une suite de 0 et de 1. Ce formalisme permet de rendre le signal moins sensible au bruit de transmission mais aussi de quantifier l'information portée par le message. Il présente ainsi un système général de communication composé d'un codeur et d'un décodeur de message de part et d'autre du canal de transmission. Ce schéma reste celui que l'on utilise aujourd'hui quotidiennement pour les transmissions par satellites ou fibres optiques.

Nous allons, dans cette vidéo la « Physique animée », nous intéresser à la représentation d'un signal dans l'espace temporel et dans l'espace fréquentiel et nous présenterons la 1^{ère} étape de la conversion d'un signal analogique en numérique, c'est-à-dire l'étape d'échantillonnage temporel. Une prochaine vidéo abordera de manière analogue l'échantillonnage spatial.

Description de l'opération d'échantillonnage:

La première étape de la conversion d'un signal analogique vers un signal numérique est l'échantillonnage.

Le signal à numériser peut être une onde sonore, une onde électromagnétique, une température etc.

Prenons l'exemple d'un son. Un capteur, ici un microphone, assure la conversion d'énergie mécanique en énergie électrique.

Le signal obtenu est alors une tension électrique analogique : c'est une fonction continue du temps, $s(t)$.

L'échantillonnage du signal consiste à prélever dans le temps des petits morceaux de signal.

Cette opération peut être représentée par un interrupteur ouvert et fermé périodiquement, à intervalle de temps T_e : le temps de fermeture τ est très petit devant T_e .

A la fermeture, le signal de sortie prend la valeur du signal à échantillonner et, à l'ouverture, une valeur nulle.

Le signal échantillonné obtenu est la suite des valeurs discrètes $s_{ech}(nT_e)$.

Mathématiquement, la fonction échantillonnée que l'on obtient est le produit de la fonction $s(t)$ par la fonction $h(t)$, qui est une suite périodique d'impulsions, appelée peigne de Dirac :

$$s_{ech} = s(t)h(t)$$

L'échantillonnage ne doit pas détériorer l'information portée par le signal.

A quelle fréquence prélever les échantillons pour que la reconstruction du signal de sortie soit fidèle au signal d'entrée ?

Une faible fréquence d'échantillonnage permettrait de minimiser le temps d'acquisition, le nombre d'échantillons à coder et à mémoriser, cependant si cette fréquence est trop faible les variations rapides du signal ne pourront être retranscrites.

Nous avons vu que l'opération d'échantillonnage revenait à multiplier le signal analogique par le peigne de Dirac, $h(t)$.

$$s_{ech} = s(t)h(t)$$

On choisit un signal sinusoïdal à échantillonner, de fréquence f_0 :

$$s(t) = s_0 \cos(2\pi f_0 t)$$

Le peigne de Dirac est périodique, de période T_e et de fréquence $f_e = 1/T_e$.

Il peut se décomposer en séries de Fourier, sous la forme d'une somme infinie de cosinus de fréquences kf_e :

$$h(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_e t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f_e t)$$

On remplace cette expression dans l'équation (1) :

$$s_{ech} = s(t)h(t) = s_0 \cos(2\pi f_0 t) \left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f_e t) \right]$$

En linéarisant les produits de cosinus, le signal échantillonné peut s'écrire sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales de fréquences f_0 , $kf_e - f_0$ et $kf_e + f_0$:

$$s_{ech}(t) = s_0 a_0 \cos(2\pi f_0 t) + \frac{s_0 a_1}{2} [\cos(2\pi(f_e + f_0)t) + \cos(2\pi(f_e - f_0)t)] + \dots +$$

$$\frac{x_0 a_k}{2} [\cos(2\pi(kf_e + f_0)t) + \cos(2\pi(kf_e - f_0)t)] + \dots$$

- **Exemple (1)** : le signal analogique $s(t)$ de fréquence f_0 est échantillonné à la fréquence $f_e = f_0$.

Le signal échantillonné obtenu est une suite de valeurs discrètes constantes.

Cela se traduit par l'ajout d'une composante continue sur l'axe des ordonnées dans l'espace fréquentiel et de fréquences multiples de la fréquence f_0 du signal que l'on a échantillonné.

- **Exemple (2)** : la fréquence d'échantillonnage choisie est $f_e = 4f_0/3$. Le signal échantillonné ne ressemble toujours pas au signal analogique.

Sa représentation dans l'espace fréquentiel montre une fréquence $f_e - f_0 = f_0/3$ qui n'existe pas dans le signal initial : ce phénomène est dû au repliement du spectre.

C'est le même phénomène qui explique pourquoi, au cinéma, les roues des voitures semblent parfois tourner dans le mauvais sens.

Mais ce que l'œil et le cerveau peuvent encore accepter de la part de l'image d'une roue de voiture est absolument inconcevable pour l'oreille.

En effet, le repliement du spectre conduit à prendre en compte des harmoniques qui viennent complètement dénaturer les timbres des sources sonores.

Une caméra (24 images par seconde) filme une voiture qui démarre, accélère puis roule à vitesse constante.

La roue semble d'abord tourner à l'endroit, puis finalement à l'envers à 1 tour par seconde.

On en déduit que la vitesse de rotation de la roue est de 23 tours par seconde.

- **Exemple (3) :** le signal analogique $x(t)$ est échantillonné à la fréquence double $f_e = 2f_0$.

Le signal échantillonné présente la fréquence fondamentale f_0 et des raies successives aux fréquences $3f_0, 5f_0$.

- **Exemple (4) :** le signal analogique $x(t)$ est échantillonné à la fréquence $f_e = 4f_0$.

Le signal échantillonné présente la fréquence fondamentale f_0 et des raies de fréquences $3f_0, 5f_0, 7f_0, 9f_0$.

Dans les deux derniers cas, on peut alors, en utilisant un filtre passe – bas de fréquence de coupure comprise entre f_0 et $f_e - f_0$, retrouver le signal analogique d'origine.

Cette opération d'échantillonnage est réversible tant que :

$$f_e - f_0 \geq f_0 \quad \text{soit} \quad f_e \geq 2f_0$$

Il existe donc pour chaque signal un compromis entre la qualité du traitement numérique et la minimisation du nombre d'échantillons.

Le théorème de Shannon permet de connaître la fréquence d'échantillonnage à choisir pour un signal donné.

Pour reconstruire un signal de sortie de manière fidèle au signal d'entrée, il faut choisir une fréquence d'échantillonnage au moins deux fois supérieure à la fréquence maximale contenue dans le signal d'entrée :

$$f_e \geq 2f_{max}$$

Si cette règle n'est pas respectée, des fréquences parasites qui n'appartiennent pas au signal de départ apparaissent.

Ce phénomène est le repliement spectral.

Pour reconstruire un signal de sortie de manière fidèle au signal d'entrée, il faut choisir une fréquence d'échantillonnage au moins deux fois supérieure à la fréquence maximale contenue dans le signal d'entrée :

$$f_e \geq 2f_{max}$$

Expérience - échantillonnage d'un son de jazzoflûte :

Comment réaliser, au laboratoire, l'échantillonnage d'un signal réel, par exemple celui donné par un jazzoflûte enregistré par un micro et amplifié ?

Nous utilisons le circuit intégré AD 781 : c'est un échantillonneur bloqueur. C'est à dire qu'il réalise l'échantillonnage du signal puis maintient la tension constante jusqu'à la prochaine prise d'échantillon.

La fréquence d'échantillonnage est donnée par un générateur Basse Fréquence sous la forme d'un signal créneau.

On observe sur un oscilloscope le signal délivré par le jazzoflûte ainsi que son spectre.

Le fondamental a une fréquence f_0 de l'ordre de 390 Hz. Quelques harmoniques enrichissent le spectre.

Maintenant, se rajoute, en bleu, le signal échantillonné, dans un 1^{er} exemple, à $F_e = 1,2$ kHz puis son spectre.

On retrouve bien la fréquence du fondamental du jazzoflute à 390 Hz et des harmoniques situés aux fréquences $F_e - f_0$, $F_e + f_0$, $2F_e - f_0$, $2F_e + f_0$, $3F_e - f_0$, $3F_e + f_0$ et $4F_e - f_0$. Le théorème de Shannon est respecté.

Si on choisit désormais $F_e = 100$ Hz, on constate que le signal échantillonné ne suit pas du tout les variations temporelles du signal du jazzoflute. Des harmoniques apparaissent en amont de la fréquence du fondamental. Ici le critère de Shannon n'est pas respecté et le son obtenu n'a rien à voir avec celui du jazzoflute !

Quelques chiffres sur les fréquences d'échantillonnages

Le choix de la fréquence d'échantillonnage dépend de l'information véhiculée par les signaux.

En téléphonie, la fréquence d'échantillonnage choisie est de 8 kHz, car le spectre de la voix pour une conversation s'étend globalement de 300 Hz à 3,4 kHz.

Pour la radio FM, le son est échantillonné à la fréquence de 32 kHz.

En ce qui concerne la restitution musicale, le format CD, sorti dans les années 1980, fonctionne avec une fréquence d'échantillonnage de 44,1 kHz. Le choix de cette fréquence repose sur des études montrant que l'oreille humaine n'entend pas des fréquences supérieures à 20kHz. Avec ce support, on ne transmet alors théoriquement que des fréquences inférieures à 22,05 kHz.

Pour atteindre de meilleures qualités sonores, les nouveaux supports tels que DVD, blue-ray et les enregistrements studio sont réalisés à des fréquences d'échantillonnage de 48 kHz, 96 kHz ou même plus.

Il faut ensuite coder les valeurs de ces échantillons, c'est l'étape de quantification dont nous allons parler dans la prochaine vidéo de la « Physique animée » sur la conversion analogique-numérique.