# *Écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible, théorème de Bernoulli*

**Introduction :**
La mécanique des fluides est l'étude des gaz et des liquides à l'équilibre ou en mouvement.

Son importance s'explique par le fondement théorique qu'elle offre à de nombreuses disciplines comme l'aérodynamique, la météorologie, la thermodynamique des écoulements fluides, l'étude des plasmas ou encore en architecture urbaine.
L'histoire de la mécanique des fluides est un véritable défilé de grands physiciens : Archimède au III$^{\text{ème}}$ siècle av. J.-C, Léonard de Vinci au XV$^{\text{ème}}$ siècle, Pascal et Torricelli au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, Bernoulli, Pitot et Euler au 18è siècle, Navier, Poiseuille, Stokes et Reynolds au 19è, Couette, Prandtl ou encore Von Karman au 20$^{\text{ème}}$ siècle.

Intéressons nous plus particulièrement à Daniel Bernoulli : né en 1700 et mort en 1782, il fait partie d'une célèbre dynastie scientifique originaire de Bâle.
Médecin, physicien et mathématicien, il s'intéresse à la fois aux sciences mathématiques et aux sciences expérimentales et enseigne les mathématiques, l'anatomie, la botanique et la physique.
Il publie en 1738 un ouvrage intitulé « Hydrodynamica ».
Il y fait le point sur les problèmes hydrauliques de son époque et établit un théorème qui exprime le bilan hydraulique simplifié d'un fluide dans une conduite.
C'est le théorème de Bernoulli qui s'applique lors de l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible dans lequel aucun échange de chaleur ne se produit.
Il traduit simplement la conservation de l'énergie totale le long d'une ligne de courant, la pression étant liée aux densités d'énergie cinétique et d'énergie potentielle de pesanteur du fluide.
Initialement utilisé pour des fluides en circulation dans une conduite, son théorème a trouvé un important champ d'application en aérodynamique en expliquant la portance d'une aile d'avion.
Bernoulli a ainsi posé les bases de la mécanique des fluides.
Nous allons, dans cette vidéo « la physique animée », démontrer le théorème de Bernoulli et nous en donnerons quelques applications, comme la vidange d'un récipient et la mesure de la vitesse d'un avion avec une sonde Pitot.

**Expérience :**
Nous proposons ici plusieurs expériences pour mettre en évidence les phénomènes décrits par le théorème de Bernoulli, liant vitesse et pression d'un fluide.

Les robinets de salle de TP sont souvent équipés d'une trompe à eau. C'est l'effet Venturi qui est utilisé ici. La trompe à eau a la forme d'un entonnoir et est raccordée à une prise latérale d'aspiration. Cette forme en entonnoir permet d'accélérer le fluide et comme nous allons le voir dans la partie théorique, induit une dépression. Nous observons ainsi l'aspiration de l'air, le niveau de fluide marqué en bleu dans le bécher s'élève. Si nous augmentons encore la dépression, l'eau du bécher est complètement aspirée et mélangée à l'eau du robinet.

L'effet Venturi permet aussi d'expliquer comment on peut faire léviter une balle de ping-pong à l'aide d'un sèche-cheveu. Nous utilisons un gobelet percé en son fond et en forme

d'entonnoir. De la même manière que pour la trompe à eau, la pression est la plus faible là où la section est la plus petite, cette différence de pression provoque l'aspiration et le décollage de la balle.
On peut aussi garder une balle en lévitation au-dessus du jet d'air.
Il se crée dans le jet une zone de dépression qui permet, même lorsque l'on incline le sèche-cheveu, de ramener la balle au centre du jet.

C'est encore le même phénomène qui permet d'expliquer la portance d'une aile d'avion. Le profil de l'aile utilisée ici est tel que la vitesse de l'air est plus grande au-dessus de l'aile qu'en dessous. Il est résulte une force de portance vers le haut créée par la différence de pression entre le dessous et le dessus de l'aile.

Nous nous intéressons ici à la vidange d'un récipient.  La bouteille est percée à différentes altitudes.
Nous observons que la vitesse du fluide augmente avec la profondeur.
Nous allons établir, dans la partie théorique, la formule de Torricelli  permettant de voir comment la vitesse est reliée à la pression du fluide pesant dessus.

Les avions sont couramment équipés de tubes de Pitot afin de déterminer leur vitesse.
Le principe de fonctionnement est très simple et repose encore une fois sur le théorème de Bernoulli.
La sonde est constituée d'un corps comprenant deux prises de pression, une faisant face à l'écoulement et une disposée sur la partie latérale de la sonde. La différence de pression entre ces points peut se lire sur un tube gradué, rempli ici avec de l'alcool. Lorsqu'il n'y a pas d'écoulement la différence de pression est nulle. Lorsqu'on place le tube dans un écoulement, par exemple créé avec un sèche-cheveu, il apparaît une différence de pression entre les deux prises dont la valeur peut être lue à l'aide des graduations. Nous verrons dans la partie théorique, que par un simple calcul on peut remonter à la vitesse du flux d'air.

**Théorie:**
Le théorème de Bernoulli permet d'expliquer de nombreux phénomènes comme l'effet Venturi, la portance d'une aile d'avion, l'effet Magnus ou encore le fonctionnement d'une sonde Pitot ou d'une trompe à eau, comme nous venons de le voir.
Il possède différentes formulations et démonstrations.
La présentation choisie ici est valable pour un écoulement stationnaire, c'est-à-dire indépendant du temps et traduit simplement la conservation de l'énergie le long d'une ligne de courant de l'écoulement du fluide.
On considère un fluide parfait incompressible de masse volumique r , en écoulement dans le champ de pesanteur terrestre, noté g.
Les effets de viscosité sont ainsi négligés et on ne prendra pas en compte les effets thermiques au sein du fluide.
Si on note v(M) le champ des vitesses du fluide au point M, une ligne de courant est une ligne qui, en chacun de ses points, est constamment tangente au vecteur vitesse.
On s'intéresse à un tube de courant. La vitesse en amont est $v_1$, la pression $P_1$ et la cote verticale $z_1$. En aval, ces quantités sont notées $v_2$, $P_2$ et $z_2$.

On considère le système fermé constitué à l'instant t de la partie rouge ($\Sigma_0$) de fluide et de la masse dm en amont qui va y rentrer pendant dt et, à l'instant t+dt, de la même partie ($\Sigma_0$) et de la même masse dm, puisque l'écoulement est stationnaire, qui en est sortie en aval pendant dt.

La même masse dm peut s'écrire de deux manières équivalentes :

$$dm = \rho S_1 v_1 dt = \rho S_2 v_2 dt$$

En négligeant les effets thermiques (pas de transfert de chaleur au sein du fluide), la conservation de l'énergie mécanique du fluide appliqué à ce système fermé, en régime stationnaire, donne : les variations d'énergies cinétique et potentielle sont compensées par le travail des forces de pression en aval et en amont.
On en déduit l'expression du théorème de Bernoulli, valable sur une ligne de courant.
La somme de la pression et des énergies volumiques cinétique et potentielle est constante le long d'une ligne de courant.

Une première conséquence de la loi de Bernoulli : quand un fluide accélère, une dépression apparaît : c'est l'effet Venturi.
Prenons l'exemple d'un courant d'air qui s'engouffre entre deux immeubles. Si l'écoulement est stationnaire et incompressible, la conservation du débit volumique (le produit de la vitesse par la section S est constante) montre que la vitesse est d'autant plus forte que la section est faible.
C'est donc entre les immeubles que le vent est le plus fort et que la pression, en s'appuyant sur le théorème de Bernoulli, est la plus faible.
Un bon moyen mnémotechnique ? La file d'attente au restaurant universitaire ! En effet, les étudiants sont compressés dans la partie large à écoulement faible puis deviennent à l'aise dans la partie étroite à écoulement plus rapide.

Une autre application du théorème de Bernoulli: la vidange d'un récipient.
Reprenons le cas que nous avons présenté dans l'expérience, d'un récipient de section S, à l'air libre, qui se vide par un petit trou de section s. La vitesse de sortie du liquide est beaucoup plus grande que la vitesse en A.
Le théorème de Bernoulli, valable ici en régime quasi – stationnaire, donne entre les points A et B :

$$P_0 + \rho g h = P_0 + \frac{1}{2}\rho V^2$$

$$V = \sqrt{2gH}$$

C'est la formule de Torricelli : on retrouve, comme on l'a vu dans l'expérience, que la vitesse d'écoulement du liquide en un point augmente avec la hauteur de fluide situé au-dessus de ce point.

Une troisième application : détermination de la vitesse et de la puissance d'un jet d'eau
La hauteur h du jet d'eau sur le lac de Genève est de l'ordre de 140 m. On souhaite déterminer, en négligeant les frottements de l'air, la vitesse de l'eau $v_0$ à la sortie de la pompe située au point A.
Le théorème de Bernoulli donne, entre A et le point B, situé au sommet du jet, où la vitesse est nulle :

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = P_0 + \rho g h$$

D'où la vitesse en sortie de pompe, de l'ordre de 190 km/h.
La puissance $P_m$ de la pompe utilisée peut être déterminée en suivant un raisonnement équivalent à celui qui nous a permis de démontrer le théorème de Bernoulli, en rajoutant un terme énergétique supplémentaire, égal à $P_m dt$.

On trouve, en notant $D_v$ le débit volumique du jet, égal à 500 litres par seconde, une puissance de 700 kW

$$P_m = D_v \rho \frac{v_0^2}{2} \approx 700 \, kW$$

La mesure d'une vitesse : la sonde de Pitot

Nous avons tous fait l'expérience de passer une main par la fenêtre en voiture et constaté que la vitesse de l'écoulement se « transforme » en pression sur notre main.

C'est le principe de la sonde de Pitot utilisée, par exemple, dans les avions et qui permet de calculer la vitesse V de l'appareil à partir de la différence de pression :

$$P_A - P_B = \rho g h$$

Considérons la ligne de courant issu du point O situé sur l'axe du tube et qui vient ainsi s'arrêter au point A.

Considérons ensuite la ligne de courant issue d'un point O' très proche de O et qui effleure le tube en passant par le point B.

En appliquant la relation de Bernoulli sur la ligne de courant O'B et en négligeant la variation d'altitude, on montre que la pression en B est égale à celle en O', elle même identique à la pression en O.

PB=PO

En appliquant la relation de Bernoulli sur la ligne de courant OA, on obtient :

$$P_A = P_0 + \frac{1}{2} \rho_{air} V^2$$

On peut ainsi remonter à la valeur de la vitesse en mesurant la dénivellation h du fluide dans le tube en U :

$$V = \sqrt{\frac{2(P_A - P_B)}{\rho_{air}}} = \sqrt{\frac{2\rho g h}{\rho_{air}}}$$

Pourquoi un avion vole ?

Le profil de l'aile d'avion dessinée ici est tel que la vitesse de l'air est supérieure au dessus de l'aile (l'extrados) qu'en dessous (l'intrados).

Selon le théorème de Bernoulli, la pression sera plus forte là où la vitesse est la plus faible, soit en dessous.

Il en résulte une force globale de pression vers le haut, appelée portance et qui explique pourquoi un avion peut voler.

Mais l'air est compressible : le théorème de Bernoulli peut-il encore s'appliquer ?

Supposons que l'air passe d'une région où sa vitesse est nulle et sa pression maximale ($P_{max}$) à une région où la pression est minimale ($P_{min}$) et sa vitesse maximale ($v_{max}$).

Si on admet que le théorème de Bernoulli reste valable :

$$\Delta P = P_{\max} - P_{\min} = \rho \frac{v_{\max}^2}{2}$$

Une telle variation de pression est compatible avec l'hypothèse d'incompressibilité si la variation de la masse volumique est faible en valeur relative. Celle ci s'obtient en utilisant le coefficient de compressibilité isotherme :

$$\Delta\rho \approx \chi_T \rho \Delta P = \chi_T \rho^2 \frac{v_{\max}^2}{2} << \rho \qquad soit \qquad v_{\max} << \sqrt{\frac{2}{\chi_T \rho}}$$

La vitesse du son dans l'air fait intervenir le coefficient de compressibilité isentropique (du même ordre de grandeur que celui isotherme) et vaut :

$$c_s = \sqrt{\frac{1}{\rho \chi_S}}$$

La variation de la masse volumique de l'air pourra ainsi être négligée tant que la vitesse d'écoulement de l'air reste très inférieure à la vitesse de propagation du son dans ce fluide. Pour une voiture qui roule à 130 km/h, le rapport v / $c_s$ (appelé nombre de Mach) vaut 0,1 : on se trouve bien dans le cas d'un écoulement incompressible.
Par contre, pour un avion de ligne en régime de croisière, le nombre de Mach est de l'ordre de 0,8, nécessitant ainsi la prise en compte des effets dus à la compressibilité.

Finalement, le théorème de Bernoulli, ça marche « presque » tout le temps …
Néanmoins, les équations se compliquent pour un fluide visqueux, compressible et en écoulement non stationnaire.
Comment expliquer par exemple :
- Les tourbillons marginaux aux extrémités des ailes d'avions ?
- Le décrochage d'une aile d'avion ?
- La mesure d'une vitesse d'un avion allant à Mach 2 ?
Les prochaines vidéos de la collection « Physique animée » lèveront une partie de ces interrogations …