Écoulement de Poiseuille d'un fluide visqueux

Introduction :

Jean Léonard Marie Poiseuille naît à Paris en 1797 et meurt en 1869.
Diplômé de l'Ecole Polytechnique, il était à la fois physicien et médecin.
Il a écrit différents mémoires sur le cœur et la circulation du sang dans les vaisseaux et a établi, dans un ouvrage intitulé « Le Mouvement des liquides dans les tubes de petits diamètres », les lois de l'écoulement laminaire des fluides visqueux dans des tuyaux cylindriques.
Son objectif était de comprendre la dynamique de la circulation sanguine chez l'homme sachant que le plasma sanguin se comporte comme un fluide newtonien, c'est-à-dire un fluide dont la viscosité ne dépend pas des forces extérieurs qui agissent sur lui.
Il précisa notamment, dans les années 1840, la forme analytique du profil des vitesses d'écoulement, dépendant du rayon du tuyau et de la viscosité du fluide.

Les écoulements de ce type sont présents tout autour de nous, comme par exemple dans :
- les canalisations d'eau entre le château d'eau et les habitations,
- les canalisations qui transportent le pétrole sur de longues distances,
- le circuit d'eau irrigant les radiateurs d'une maison,
- les imprimantes à technologie jet d'encre,
- l'utilisation des seringues,
- ou encore dans le transport la sève dans les végétaux.

A toute petite échelle, en microfluidique, on peut aussi retrouver les propriétés d'un écoulement de Poiseuille, dans des « laboratoires sur puces » (ou lab-on-chip) qui réalisent le dosage, le mélange ou l'analyse de micro gouttelettes de liquides.

C'est pourquoi, nous allons, dans cette vidéo, nous intéresser à l'écoulement laminaire d'un liquide visqueux dans une canalisation, un tuyau, un micro-canal, un vaisseau sanguin ou encore dans une rivière.

Expérience :

Nous allons étudier l'écoulement de Poiseuille dans un tuyau de section circulaire.
Pour des raisons pratiques, le dispositif expérimental est un tube en forme de U, afin de disposer de deux réservoirs aux extrémités du tuyau. Il est percé en son centre afin de pouvoir marquer un filet de fluide avec du colorant.
Le tube est rempli avec du glycérol pur. Nous allons appliquer une différence de pression sur une extrémité du tube et observer le déplacement du fluide.
La différence de pression peut être obtenue en remplissant l'un des deux réservoirs avec du glycérol ou encore en utilisant un piston qui vient appuyer sur la surface du fluide.
On souhaite créer un écoulement laminaire, d'où l'utilisation d'un fluide très visqueux comme le glycérol.
Lorsque la pression augmente d'un côté du tuyau, le fluide se met en mouvement.
Nous pouvons observer que le déplacement du fluide n'est pas le même sur toute la section du tuyau. Le glycérol se déplace plus rapidement au centre du tube et plus lentement à proximité des parois.
C'est ce profil de vitesses à l'état stationnaire que l'on va chercher à établir analytiquement par la suite.
Il permet de remonter au calcul du débit et aux contraintes exercées sur le tuyau.

Si nous inversons le sens de l'écoulement, en changeant de sens la différence de pression, nous observons que le filet de fluide coloré vient reprendre sa forme initiale.
Cet écoulement est réversible.

Théorie:
On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide visqueux dans une conduite cylindrique horizontale de rayon R et de longueur L, en régime stationnaire, c'est-à-dire indépendant du temps.
Le nombre de Reynolds de l'écoulement est supposé être plus petit que 2 000.
L'écoulement est alors laminaire et les lignes de courant sont parallèles à l'axe du cylindre, les tranches de fluide glissant progressivement les unes sur les autres sans se croiser.
Le vecteur vitesse de l'écoulement pourra s'écrire : $\vec{v} = v(r)\overrightarrow{u_z}$
La vitesse est nulle sur les parois, par adhérence du fluide visqueux, et maximale au centre de la conduite.
On va montrer que le profil des vitesses pour cet écoulement laminaire est parabolique.
Nous négligerons la pesanteur dans un tel écoulement.
On considère la portion de fluide cylindrique, de rayon r et de longueur celle de la conduite L, centrée sur l'axe.
On note P_e la pression à l'entrée de cette portion de fluide et P_s la pression en sortie.
On applique le théorème de la résultante cinétique au système constitué de cette portion de fluide à l'instant t et de la masse dm qui y rentre entre les instants t et t + dt.
A l'instant t + dt, ce système est constitué de la même portion de fluide contenu dans le cylindre de rayon r et de la masse dm qui en est sortie entre les instants t et t + dt.
En régime stationnaire, la variation de quantité de mouvement de ce système fermé est alors simplement nulle.
Par conséquent, la somme des forces qui s'exercent sur ce système est également nulle.
Soit la force de pression en amont, $\pi r^2 P_e$, moins la force de pression en aval, $\pi r^2 P_s$ plus la force de frottement visqueuse F qui s'exerce sur la surface latérale du cylindre de rayon r qui est égale à 0 : $\pi r^2 P_e - \pi r^2 P_s + F = 0$
L'interprétation physique de ce résultat est simple : lorsqu'un liquide visqueux s'écoule dans un tuyau, la pression diminue lorsqu'on se déplace dans le même sens que l'écoulement : cela crée une force dans le sens de l'écoulement qui contrebalance la force de frottement causée par la viscosité du liquide.
Pour un fluide visqueux newtonien, la force de viscosité F est donnée par : $F = \eta \dfrac{dv(r)}{dr} 2\pi r L$

On en déduit : $\pi r^2 P_e - \pi r^2 P_s + \eta \dfrac{dv(r)}{dr} 2\pi r L = 0$
Ce qui permet d'isoler la dérivée : $\dfrac{dv(r)}{dr} = -\dfrac{P_e - P_s}{2\eta L} r$
Et d'obtenir, en écrivant que le fluide colle à la paroi en r = R et donc que sa vitesse y est nulle, le champ des vitesses par intégration :

$$v(r) = \frac{P_e - P_s}{4\eta L}(R^2 - r^2)$$

On peut tracer l'allure du profil des vitesses, c'est-à-dire tracer la courbe qui passe par les extrémités des vecteurs vitesses, ces derniers étant dessinés à partir d'un plan z = cste.
Le profil obtenu est bien parabolique.

Le débit volumique dans la conduite est le flux du vecteur vitesse à travers une section transverse quelconque, soit, en prenant comme surface élémentaire celle comprise entre deux cercles de rayons r et r + dr :

$$D_V = \int_0^R v(r) 2\pi r\, dr = \int_0^R \frac{P_e - P_s}{4\eta L}(R^2 - r^2) 2\pi r dr$$

D'où l'expression du débit volumique :

$$D_V = \frac{\pi R^4}{8\eta L}(P_e - P_s)$$

La différence de pression P_e- P_s est le « moteur » de l'écoulement. Encore appelée « perte de charge », elle est proportionnelle au débit volumique (c'est la loi de Poiseuille) :

$$P_e - P_s = \Delta P = \frac{8\eta L}{\pi R^4} D_V$$

On peut, par analogie avec la loi d'Ohm valable pour les conducteurs ohmiques en électricité, définir une résistance hydraulique.
De la même manière qu'en électricité où l'on définit la résistance électrique d'un fil de cuivre de résistivité r, de longueur L et de rayon R, parcouru par un courant I quand la tension à ses bornes est V_1- V_2 sous la forme …
Les conclusions seront les mêmes que ce soit pour un mouvement d'électrons ou de liquide visqueux : plus la longueur parcourue est grande ou plus le rayon est faible et plus sont importants les frottements et donc les résistances.
Un robinet de jardin a été installé à 50 m de l'arrivée principale d'eau où la pression vaut 3 bars.
Le tuyau de raccordement utilisé pour rejoindre le robinet de jardin a un diamètre intérieur standard de 1 cm.
Le débit volumique souhaité est de 0,4 L/s.
La viscosité de l'eau est $\eta = 10^{-3}$ Poiseuille.
On évalue la perte de charge pour cet écoulement de Poiseuille laminaire :

$$P_e - P_s = \Delta P = \frac{8\eta L}{\pi R^4} D_V \approx 80.10^3 Pa \approx 0{,}8 bar$$

Et on obtient une valeur de l'ordre de 0,8 bar, qui est loin d'être négligeable.
L'asperseur classique de jardin, qui a besoin de 3 bars ou plus, ne pourra fonctionner correctement !