Formation pour les professeurs de l'académie de Versailles
Séminaire autour des objets numériques

Pourquoi mon ordinateur calcule faux?

Sylvie Boldo

Équipe-projet ProVal

16 juin 2009

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE | INRIA

centre de recherche SACLAY - ÎLE-DE-FRANCE

Mots-clés

- contrôle et qualité
- numérisation
- esprit critique

Mots-clés

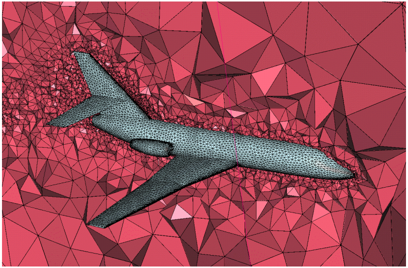
- contrôle et qualité
- numérisation
- esprit critique

- base de numération
- notation scientifique, nombre à virgule flottante
- standard IEEE-754
- arrondi
- dépassement de capacité

Plan

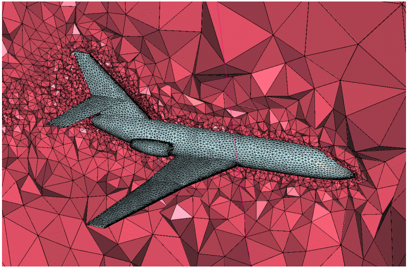
Ah bon, mon ordinateur calcule ?

Motivations



Visualisation de champs de vitesse autour d'un avion Falcon

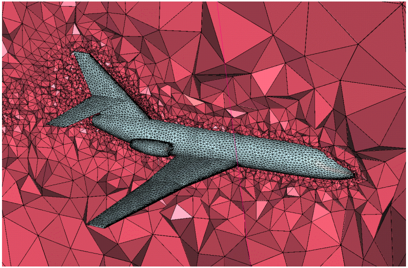
Motivations



Visualisation de champs de vitesse autour d'un avion Falcon

Les ordinateurs calculent tout et n'importe quoi :

Motivations

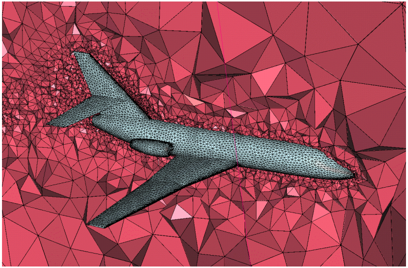


Visualisation de champs de vitesse autour d'un avion Falcon

Les ordinateurs calculent tout et n'importe quoi :

- aéronautique,
- géométrie 3D,

Motivations

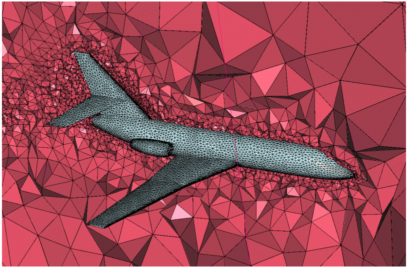


Visualisation de champs de vitesse autour d'un avion Falcon

Les ordinateurs calculent tout et n'importe quoi :

- aéronautique,
- géométrie 3D,
- BTP,
- prévisions météo,

Motivations

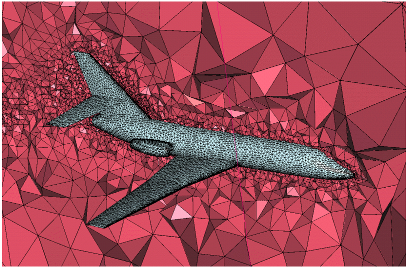


Visualisation de champs de vitesse autour d'un avion Falcon

Les ordinateurs calculent tout et n'importe quoi :

- aéronautique,
- géométrie 3D,
- BTP,
- prévisions météo,
- simulations nucléaires,

Motivations



Visualisation de champs de vitesse autour d'un avion Falcon

Les ordinateurs calculent tout et n'importe quoi :

- aéronautique,
- géométrie 3D,
- BTP,
- prévisions météo,
- simulations nucléaires,
- feuilles Excel
- ...

Ah bon, mon ordinateur calcule faux ?

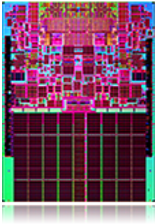
Ah bon, mon ordinateur calcule faux ?

C'est qu'il y a un bug !

C'est qu'il y a un bug !

Il peut y avoir :

- un bug matériel (le processeur est faux).

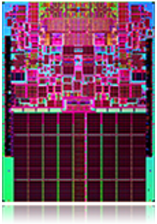


C'est qu'il y a un bug !

Il peut y avoir :

- un bug matériel (le processeur est faux).

  Ça arrive, mais c'est très rare.



C'est qu'il y a un bug !

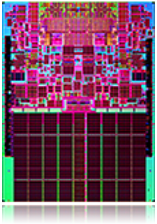
Il peut y avoir :

- un bug matériel (le processeur est faux).

  Ça arrive, mais c'est très rare.

  Bug du Pentium : certaines divisions fausses à partir du 5e chiffre

  475 millions de $.



C'est qu'il y a un bug !

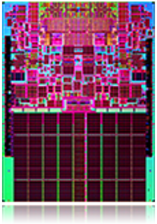
Il peut y avoir :

- un bug matériel (le processeur est faux).

  Ça arrive, mais c'est très rare.

  Bug du Pentium : certaines divisions fausses à partir du 5e chiffre

  475 millions de $.



- un bug logiciel.

C'est qu'il y a un bug !

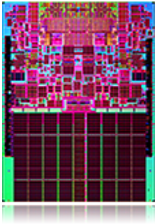
Il peut y avoir :

- un bug matériel (le processeur est faux).

  Ça arrive, mais c'est très rare.

  Bug du Pentium : certaines divisions fausses à partir du 5e chiffre

  475 millions de $.



- un bug logiciel.

  Là, par contre. . .

C'est qu'il y a un bug !

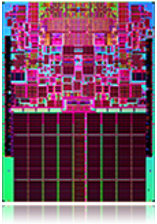
Il peut y avoir :

- un bug matériel (le processeur est faux).

  Ça arrive, mais c'est très rare.

  Bug du Pentium : certaines divisions fausses à partir du 5e chiffre

  475 millions de $.



- un bug logiciel.

  Là, par contre. . .

  Ariane 5 : explosion due à un dépassement de capacité

  500 millions de $.

Un exemple (28/09/07)

Prenons Microsoft Excel 2007.

Un exemple (28/09/07)

Prenons Microsoft Excel 2007.

- Dans la case A1, inscrivez 850
- Dans la case A2, inscrivez 77,1
- Dans la case A3, inscrivez la formule suivante :
  =PRODUIT(A1 : A2)

Un exemple (28/09/07)

Prenons Microsoft Excel 2007.

- Dans la case A1, inscrivez 850
- Dans la case A2, inscrivez 77,1
- Dans la case A3, inscrivez la formule suivante :
  =PRODUIT(A1 : A2)

Excel vous répond 100 000.

Un exemple (28/09/07)

Prenons Microsoft Excel 2007.

- Dans la case A1, inscrivez 850
- Dans la case A2, inscrivez 77,1
- Dans la case A3, inscrivez la formule suivante :
  =PRODUIT(A1 : A2)

Excel vous répond 100 000.
La réponse juste est 65 535.

Un exemple (28/09/07)

Prenons Microsoft Excel 2007.

- Dans la case A1, inscrivez 850
- Dans la case A2, inscrivez 77,1
- Dans la case A3, inscrivez la formule suivante :
  =PRODUIT(A1 : A2)

Excel vous répond 100 000.
La réponse juste est 65 535.

Mais ce n'est « que » un bug d'affichage.

En fait, les bugs y sont rarement pour quelque chose...

En fait, les bugs y sont rarement pour quelque chose. . .

Votre ordinateur calcule toujours (un peu) faux

En fait, les bugs y sont rarement pour quelque chose. . .

Votre ordinateur calcule toujours (un peu) faux

. . .mais vous ne vous en rendez pas compte.

En fait, les bugs y sont rarement pour quelque chose...

Votre ordinateur calcule toujours (un peu) faux

...mais vous ne vous en rendez pas compte.

Comment l'ordinateur fait pour calculer (faux) ?

Plan

Objets

Des objets du monde réel :

Des objets numériques :

Objets

Des objets du monde réel :

- calculatrice

Des objets numériques :

Objets

Des objets du monde réel :

- calculatrice
- calculatrice « scientifique »

Des objets numériques :

Objets

Des objets du monde réel :

- calculatrice
- calculatrice « scientifique »
- ordinateur (plutôt unité à virgule flottante, FPU)

Des objets numériques :

Objets

Des objets du monde réel :

- calculatrice
- calculatrice « scientifique »
- ordinateur (plutôt unité à virgule flottante, FPU)

Des objets numériques :

- des valeurs

Les nombres entiers

Les bases

On peut écrire un nombre dans une base donnée :

Base 10	2009
Base 2	11111011001
Base 2009	10

Les bases et les chiffres

On peut écrire un nombre dans une base donnée et sur un ensemble de chiffres donné :

Base 10	$\{0, 1, \ldots, 9\}$	2009
Base 10	$\{\bar{5}, \bar{4}, \ldots, 5\}$	$201\bar{1}$
Base 2	$\{0, 1\}$	11111011001
Base 2	$\{\bar{1}, 0, 1\}$	$100000\bar{1}11001$

Les bases et les chiffres

On peut écrire un nombre dans une base donnée et sur un ensemble de chiffres donné :

Base 10	$\{0, 1, \ldots, 9\}$	2009
Base 10	$\{\bar{5}, \bar{4}, \ldots, 5\}$	$201\bar{1}$
Base 2	$\{0, 1\}$	11111011001
Base 2	$\{\bar{1}, 0, 1\}$	$100000\bar{1}11001$

Notez que le système de numération peut être redondant : $5 = 1\bar{5}$.

Les bases et les chiffres

À quoi ça sert ?

$$\begin{array}{cccccc} & & 2 & 0 & 0 & 9 \\ + & & 7 & 9 & 9 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Pour ajouter deux nombres de taille n, il faut n opérations (retenues).

Si l'on considère la base 10 et les chiffres $\left\{\bar{6}, \bar{5}, \ldots, 6\right\}$

$$\begin{array}{cccccc} & & 2 & 0 & 1 & \bar{1} \\ + & 1 & \bar{2} & 0 & \bar{1} & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Les bases et les chiffres

À quoi ça sert ?

$$\begin{array}{cccccc} & & 2 & 0 & 0 & 9 \\ + & & 7 & 9 & 9 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Pour ajouter deux nombres de taille n, il faut n opérations (retenues).

Si l'on considère la base 10 et les chiffres $\left\{\bar{6}, \bar{5}, \dots, 6\right\}$

$$\begin{array}{cccccc} & & 2 & 0 & 1 & \bar{1} \\ + & 1 & \bar{2} & 0 & \bar{1} & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

En utilisant un système de numération adapté (en particulier redondant), on peut ajouter deux nombres de taille n en seulement 3 opérations.

Les bases et les chiffres (J.-M. Muller)

Algorithme d'Avižienis (1961) pour une base r et un ensemble de chiffres $\{\bar{a}, \ldots, a\}$ avec $a \leq r-1$ et $2a \geq r+1$:

Entrées : $x = x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_0$ et $y = y_{n-1}y_{n-2}\ldots y_0$
Sortie : $s = s_n x_{n-1}\ldots s_0$

Faire en parallèle pour i de 0 à $n-1$ le calcul de t_{i+1} (retenue) et de w_i (somme intermédiaire) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} t_{i+1} & = & \left\{\begin{array}{cl} +1 & \text{si } x_i + y_i \geq a \\ 0 & \text{si } -a+1 \leq x_i + y_i \leq a-1 \\ -1 & \text{si } x_i + y_i \leq -a \end{array}\right. \\ w_i & = & x_i + y_i - r \times t_{i+1} \end{array}\right.$$

Faire en parallèle pour i de 0 à n le calcul de $s_i = w_i + t_i$ avec $w_n = t_0 = 0$

Les bases et les chiffres

Exemple en base 10 avec les chiffres $\left\{\bar{6}, \bar{5}, \ldots, 6\right\}$:

x_i	2	3	$\bar{5}$	6	0	3	6	$= 2\,256\,036$
y_i	1	3	$\bar{1}$	0	4	3	$\bar{2}$	$= 1\,290\,428$
$x_i + y_i$								
t_{i+1}								
w_i								
s_i								

Les bases et les chiffres

Exemple en base 10 avec les chiffres $\left\{\bar{6}, \bar{5}, \ldots, 6\right\}$:

x_i	2	3	$\bar{5}$	6	0	3	6	$= 2\ 256\ 036$
y_i	1	3	$\bar{1}$	0	4	3	$\bar{2}$	$= 1\ 290\ 428$
$x_i + y_i$							4	
t_{i+1}							0	
w_i							4	
s_i								

Les bases et les chiffres

Exemple en base 10 avec les chiffres $\left\{\bar{6}, \bar{5}, \ldots, 6\right\}$:

x_i	2	3	$\bar{5}$	6	0	3	6	$= 2\,256\,036$
y_i	1	3	$\bar{1}$	0	4	3	$\bar{2}$	$= 1\,290\,428$
$x_i + y_i$			$\bar{6}$				4	
t_{i+1}			$\bar{1}$				0	
w_i			4				4	
s_i								

Les bases et les chiffres

Exemple en base 10 avec les chiffres $\left\{\bar{6}, \bar{5}, \ldots, 6\right\}$:

x_i	2	3	$\bar{5}$	6	0	3	6	$= 2\ 256\ 036$
y_i	1	3	$\bar{1}$	0	4	3	$\bar{2}$	$= 1\ 290\ 428$
$x_i + y_i$			$\bar{6}$	6			4	
t_{i+1}			$\bar{1}$	1			0	
w_i			4	$\bar{4}$			4	
s_i								

Les bases et les chiffres

Exemple en base 10 avec les chiffres $\left\{\bar{6}, \bar{5}, \ldots, 6\right\}$:

$$
\begin{array}{l|ccccccc|l}
x_i & 2 & 3 & \bar{5} & 6 & 0 & 3 & 6 & = 2\,256\,036 \\
y_i & 1 & 3 & \bar{1} & 0 & 4 & 3 & \bar{2} & = 1\,290\,428 \\
\hline
x_i + y_i & 3 & 6 & \bar{6} & 6 & 4 & 6 & 4 & \\
t_{i+1} & 0 & 1 & \bar{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
w_i & 3 & \bar{4} & 4 & \bar{4} & 4 & \bar{4} & 4 & \\
s_i & & & & & & & & \\
\end{array}
$$

Les bases et les chiffres

Exemple en base 10 avec les chiffres $\left\{\bar{6}, \bar{5}, \ldots, 6\right\}$:

x_i		2	3	$\bar{5}$	6	0	3	6	$= 2\,256\,036$
y_i		1	3	$\bar{1}$	0	4	3	$\bar{2}$	$= 1\,290\,428$
$x_i + y_i$		3	6	$\bar{6}$	6	4	6	4	
t_{i+1}		0	1	$\bar{1}$	1	0	1	0	0
w_i	0	3	$\bar{4}$	4	$\bar{4}$	4	$\bar{4}$	4	
s_i									

Les bases et les chiffres

Exemple en base 10 avec les chiffres $\left\{\bar{6}, \bar{5}, \ldots, 6\right\}$:

x_i		2	3	$\bar{5}$	6	0	3	6	$= 2\,256\,036$
y_i		1	3	$\bar{1}$	0	4	3	$\bar{2}$	$= 1\,290\,428$
$x_i + y_i$		3	6	$\bar{6}$	6	4	6	4	
t_{i+1}		0	1	$\bar{1}$	1	0	1	0	0
w_i	0	3	$\bar{4}$	4	$\bar{4}$	4	$\bar{4}$	4	
s_i								4	

Les bases et les chiffres

Exemple en base 10 avec les chiffres $\left\{\bar{6}, \bar{5}, \ldots, 6\right\}$:

x_i		2	3	$\bar{5}$	6	0	3	6	$= 2\,256\,036$
y_i		1	3	$\bar{1}$	0	4	3	$\bar{2}$	$= 1\,290\,428$
$x_i + y_i$		3	6	$\bar{6}$	6	4	6	4	
t_{i+1}		0	1	$\bar{1}$	1	0	1	0	0
w_i	0	3	$\bar{4}$	4	$\bar{4}$	4	$\bar{4}$	4	
s_i						5		4	

Les bases et les chiffres

Exemple en base 10 avec les chiffres $\left\{\bar{6}, \bar{5}, \ldots, 6\right\}$:

$$
\begin{array}{l|cccccccc|l}
x_i & & 2 & 3 & \bar{5} & 6 & 0 & 3 & 6 & = 2\,256\,036 \\
y_i & & 1 & 3 & \bar{1} & 0 & 4 & 3 & \bar{2} & = 1\,290\,428 \\
\hline
x_i + y_i & & 3 & 6 & \bar{6} & 6 & 4 & 6 & 4 & \\
t_{i+1} & & 0 & 1 & \color{red}{\bar{1}} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
w_i & 0 & 3 & \color{red}{\bar{4}} & 4 & \bar{4} & 4 & \bar{4} & 4 & \\
s_i & & & \color{red}{\bar{5}} & & & 5 & & 4 &
\end{array}
$$

Les bases et les chiffres

Exemple en base 10 avec les chiffres $\left\{\bar{6}, \bar{5}, \ldots, 6\right\}$:

$$
\begin{array}{l|cccccccc|l}
x_i & & 2 & 3 & \bar{5} & 6 & 0 & 3 & 6 & = 2\ 256\ 036 \\
y_i & & 1 & 3 & \bar{1} & 0 & 4 & 3 & \bar{2} & = 1\ 290\ 428 \\
\hline
x_i + y_i & & 3 & 6 & \bar{6} & 6 & 4 & 6 & 4 & \\
t_{i+1} & & 0 & 1 & \bar{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
w_i & 0 & 3 & \bar{4} & 4 & \bar{4} & 4 & \bar{4} & 4 & \\
s_i & 0 & 4 & \bar{5} & 5 & \bar{4} & 5 & \bar{4} & 4 & = 3\ 546\ 464
\end{array}
$$

Les nombres réels

Les nombres à virgule flottante

Le mémoire de mon ordinateur étant limitée, on limite la précision (le nombre de chiffres) qu'on utilise. Les valeurs ainsi représentées sont appelées nombres flottants.

$$\pi \quad \hookrightarrow \quad 3{,}14$$

Les nombres à virgule flottante

Le mémoire de mon ordinateur étant limitée, on limite la précision (le nombre de chiffres) qu'on utilise. Les valeurs ainsi représentées sont appelées nombres flottants.

$$\pi \quad \hookrightarrow \quad 3{,}14$$

$$123\,456 \quad \hookrightarrow \quad 1{,}23 \times 10^5$$

$$\frac{1}{17} = 0{,}058\,823\,5\ldots \quad \hookrightarrow \quad 5{,}88 \times 10^{-2}$$

Les nombres à virgule flottante

Le mémoire de mon ordinateur étant limitée, on limite la précision (le nombre de chiffres) qu'on utilise. Les valeurs ainsi représentées sont appelées nombres flottants.

$$\pi \quad \hookrightarrow \quad 3{,}14$$

$$123\,456 \quad \hookrightarrow \quad 1{,}23 \times 10^5$$

$$\frac{1}{17} = 0{,}058\,823\,5\ldots \quad \hookrightarrow \quad 5{,}88 \times 10^{-2}$$

Ces exemples sont en base 10 avec 3 chiffres.
Le processeur utilise la base 2 avec 24 ou 53 chiffres.

Nombre à virgule flottante

Ce n'est qu'une suite de bits

11100011010010011110000111000000

Nombre à virgule flottante

Ce n'est qu'une suite de bits

11100011010010011110000111000000

à laquelle on donne un sens selon des tailles données pour s (signe), e (exposant) et f (fraction)

$$\begin{array}{ccc} 1 & 11000110 & 10010011110000111000000 \\ \boxed{1} & \boxed{11000110} & \boxed{10010011110000111000000} \\ s & e & f \end{array}$$

Nombre à virgule flottante

et une valeur réelle

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & & \boxed{11000110} & & \boxed{10010011110000111000000} \\ s & & e & & f \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (-1)^s & \times & 2^{e-B} & \times & 1 \bullet f \\ & & & & \\ (-1)^1 & \times & 2^{198-127} & \times & 1.10010011110000111000000_2 \end{array}$$

$$-2^{54} \times 206727 \approx -3{,}7 \times 10^{21}$$

Nombre à virgule flottante

et une valeur réelle

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{1} & & \boxed{11000110} & & \boxed{10010011110000111000000} \\
s & & e & & f \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(-1)^s & \times & 2^{e-B} & \times & 1 \bullet f \\
 & & & & \\
(-1)^1 & \times & 2^{198-127} & \times & 1.10010011110000111000000_2
\end{array}$$

$$-2^{54} \times 206727 \approx -3{,}7 \times 10^{21}$$

sauf valeurs spéciales de e : ± 0, $\pm\infty$, NaN, dénormalisés.

Plan

Les calculs

Chaque calcul simple est ensuite fait au mieux : le processeur renvoie le meilleur résultat possible (norme IEEE-754), étant donnés ses impératifs.

$$3{,}14^2 = 9{,}859\,6 \quad \hookrightarrow \quad 9{,}86$$

Chaque résultat de calcul est donc arrondi.

Les calculs

Chaque calcul simple est ensuite fait au mieux : le processeur renvoie le meilleur résultat possible (norme IEEE-754), étant donnés ses impératifs.

$$3{,}14^2 = 9{,}859\,6 \quad \hookrightarrow \quad 9{,}86$$

Chaque résultat de calcul est donc arrondi.

J'ignore ici les fonctions compliquées (exponentielle, cosinus. . .).

Beaucoup de calculs

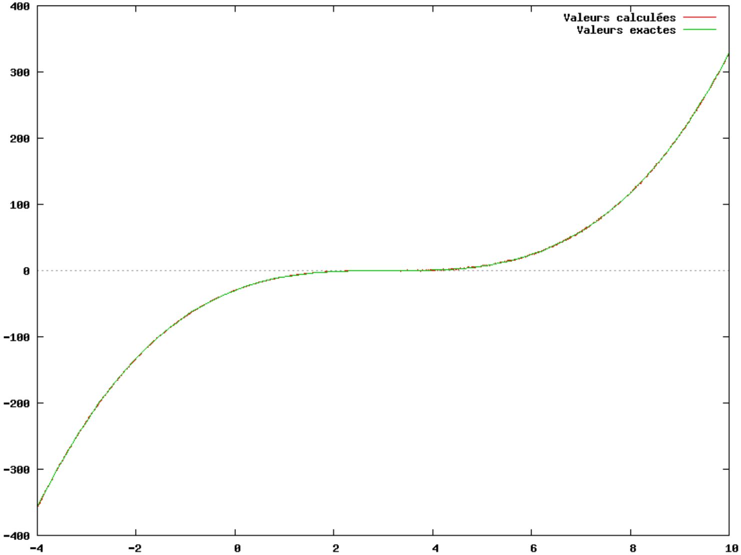
Même si un calcul est presque juste, une succession de calculs est parfois fausse :

$$\pi^2 \quad \hookrightarrow \quad 3{,}14^2 \quad \hookrightarrow \quad 9{,}86$$

Mais $\pi^2 = 9{,}869\ 604\ldots$ donc le nombre flottant le plus proche est 9,87.

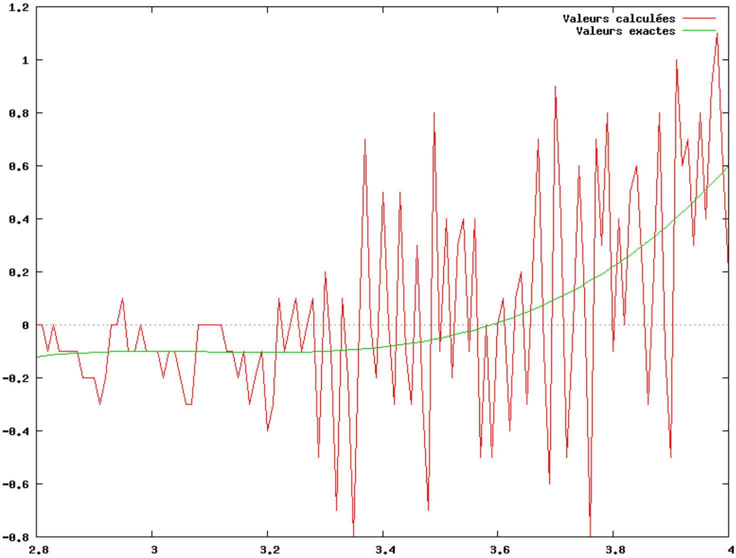
Vraiment beaucoup de calculs (G. Melquiond)

Soit $P(x) = x^3 - 9{,}3x^2 + 28{,}8x - 29{,}8$.



Vraiment beaucoup de calculs (G. Melquiond)

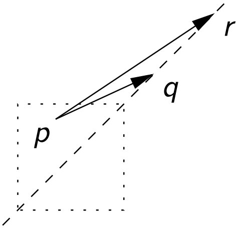
Soit $P(x) = x^3 - 9{,}3x^2 + 28{,}8x - 29{,}8$.



Mais les programmeurs, ils savent !

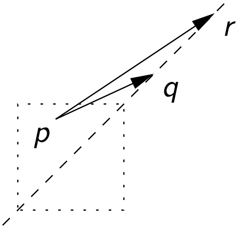
Orientation de 3 points (G. Melquiond)

Étant donnés 3 points du plan *p*, *q* et *r*. On veut savoir si *pqr* sont alignés dans le sens horaire ou dans le sens anti-horaire.



Orientation de 3 points (G. Melquiond)

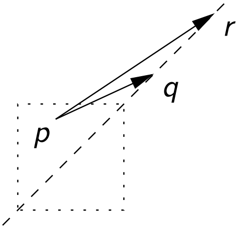
Étant donnés 3 points du plan p, q et r. On veut savoir si pqr sont alignés dans le sens horaire ou dans le sens anti-horaire.



$$\mathrm{orient}_2(p, q, r) = \mathrm{signe} \begin{vmatrix} q_x - p_x & r_x - p_x \\ q_y - p_y & r_y - p_y \end{vmatrix}$$

Orientation de 3 points (G. Melquiond)

Étant donnés 3 points du plan p, q et r. On veut savoir si pqr sont alignés dans le sens horaire ou dans le sens anti-horaire.

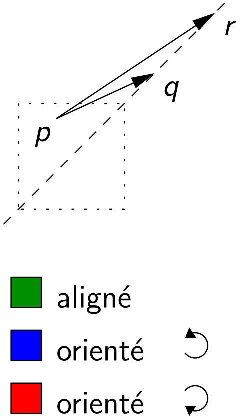


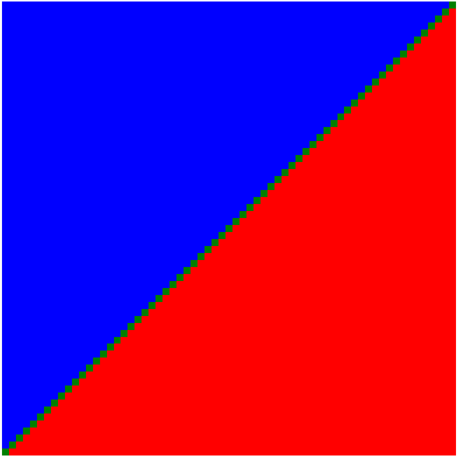
$$\text{orient}_2(p, q, r) = \text{signe} \begin{vmatrix} q_x - p_x & r_x - p_x \\ q_y - p_y & r_y - p_y \end{vmatrix}$$

```
float det = (qx - px) * (ry - py)
          - (qy - py) * (rx - px);
if (det > 0) return POSITIVE;
if (det < 0) return NEGATIVE;
return ZERO;
```

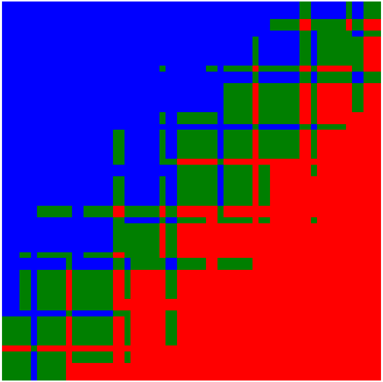
Orientation de 3 points - calculs exacts (G. Melquiond)

Pour $q = (8.1, 8.1)$ et $r = (12.1, 12.1)$ et p autour de $(1{,}5; 1.5)$,
le signe du déterminant devrait être :





Orientation de 3 points - calculs flottants simple précision

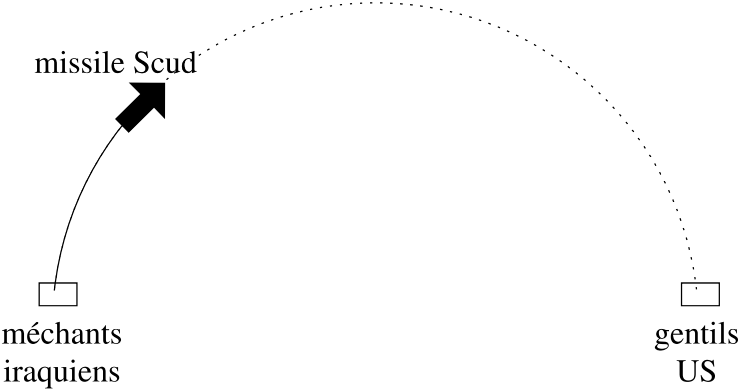


Première guerre du Golfe (1991)

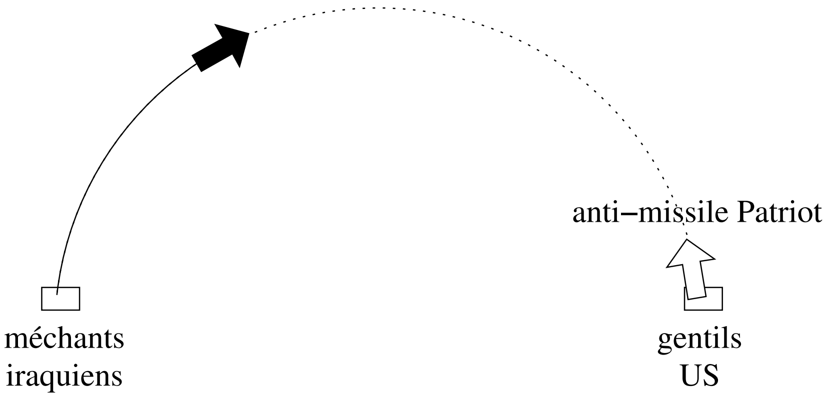
méchants
iraquiens

gentils
US

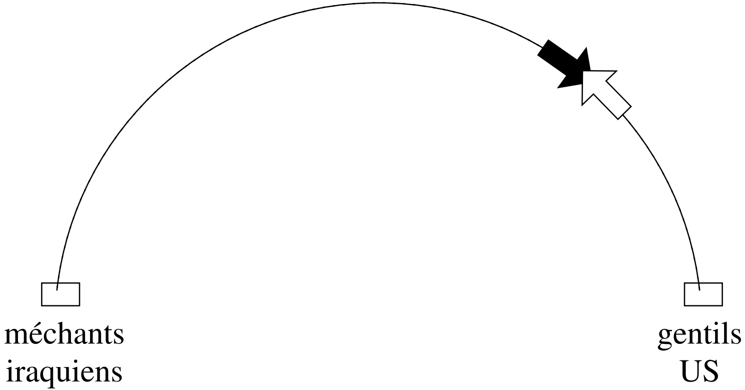
Première guerre du Golfe (1991)



Première guerre du Golfe (1991)



Première guerre du Golfe (1991)



Première guerre du Golfe (1991)

méchants
iraquiens

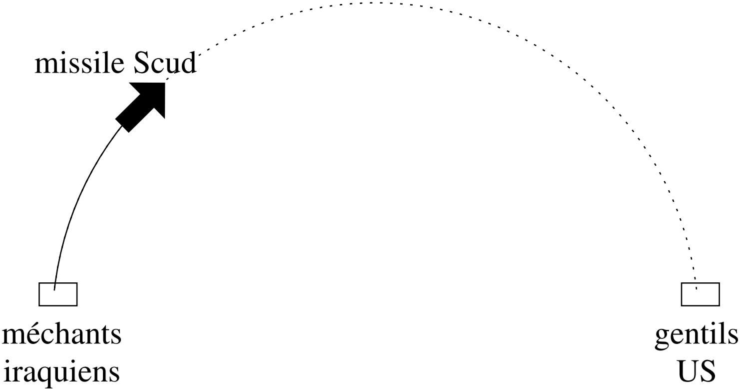
gentils
US

Première guerre du Golfe - 100h plus tard

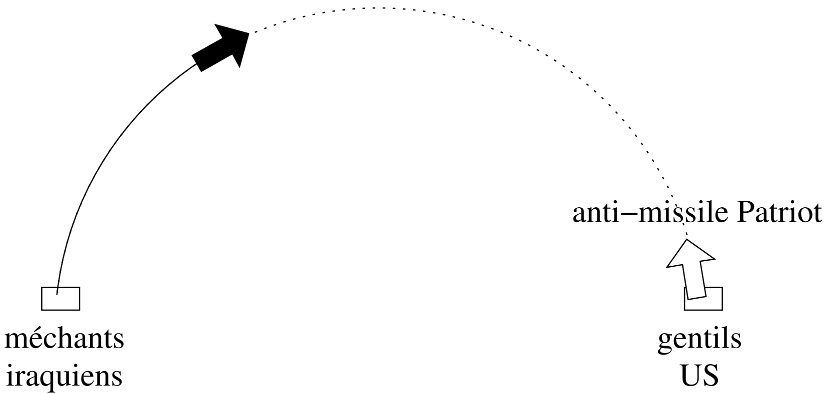
méchants
iraquiens

gentils
US

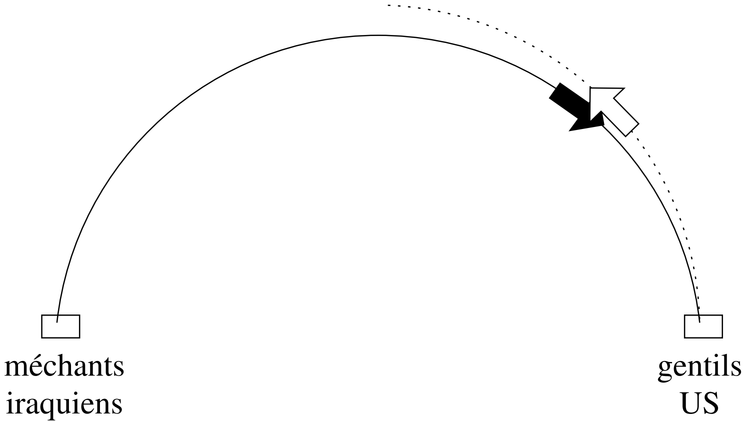
Première guerre du Golfe - 100h plus tard



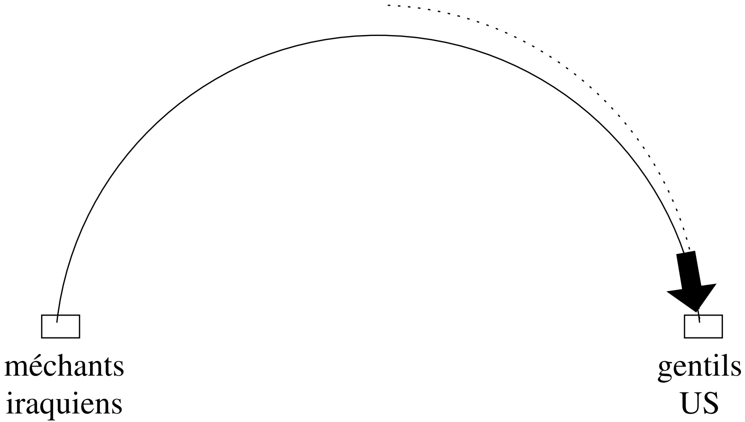
Première guerre du Golfe - 100h plus tard



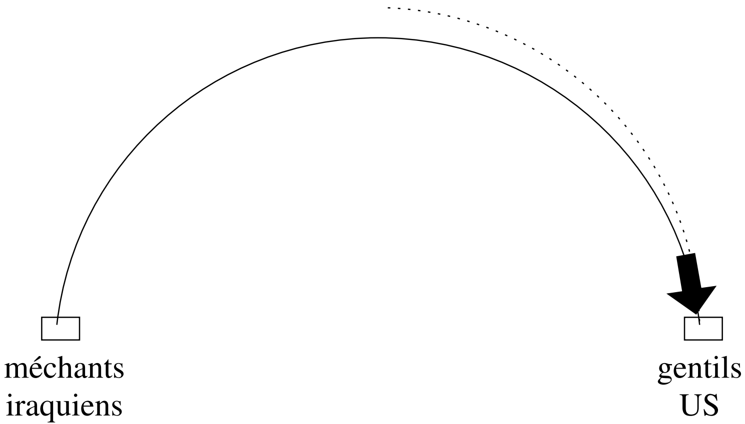
Première guerre du Golfe - 100h plus tard



Première guerre du Golfe - 100h plus tard



Première guerre du Golfe - 100h plus tard



$\Rightarrow$ 28 GI morts et 98 blessés

Première guerre du Golfe - explication

L'anti-missile Patriot est prévu pour fonctionner pendant quelques heures.

Mais ça marchait tellement bien qu'ils l'ont laissé branché.

Première guerre du Golfe - explication

L'anti-missile Patriot est prévu pour fonctionner pendant quelques heures.

Mais ça marchait tellement bien qu'ils l'ont laissé branché.

L'horloge interne ajoute 0,1s à chaque tic.
Mais 0,1 n'est pas exact en binaire :
$\Rightarrow$ une petite erreur à chaque tic
$\Rightarrow$ les erreurs, toutes dans le même sens, se sont accumulées
$\Rightarrow$ au bout de 100h, une erreur suffisante pour rater le missile

Mais encore ?

Mais encore ?

D'autres mauvaises nouvelles ?

Mais encore ?

D'autres mauvaises nouvelles ?

Oui !

Infiniment...

De plus, l'ordinateur a des limites

- vers l'infiniment petit ($\approx 10^{-300}$)
- vers l'infiniment grand ($\approx 10^{300}$)

Infiniment...

De plus, l'ordinateur a des limites

- vers l'infiniment petit ($\approx 10^{-300}$)

  masse d'un neutrino ($\approx 10^{-36}$ kg)

- vers l'infiniment grand ($\approx 10^{300}$)

  masse de l'univers ($\approx 10^{60}$ kg)

Vers l'infini et au-delà !

Au delà de ces valeurs, l'ordinateur renvoie soit 0, soit $\pm\infty$.
C'est super ! $1 + \infty = +\infty$ et $-3 * +\infty = -\infty$

Vers l'infini et au-delà !

Au delà de ces valeurs, l'ordinateur renvoie soit 0, soit $\pm\infty$.
C'est super ! $1 + \infty = +\infty$ et $-3 * +\infty = -\infty$

Mais

$$\left(10^{100}\right)^2 \hookrightarrow +\infty$$

Vers l'infini et au-delà !

Au delà de ces valeurs, l'ordinateur renvoie soit 0, soit $\pm\infty$.
C'est super ! $1 + \infty = +\infty$ et $-3 * +\infty = -\infty$

Mais

$$\left(10^{100}\right)^2 \hookrightarrow +\infty$$
$$\frac{1}{\left(10^{100}\right)^2} \hookrightarrow 0$$

Vers l'infini et au-delà !

Au delà de ces valeurs, l'ordinateur renvoie soit 0, soit $\pm\infty$.
C'est super ! $1 + \infty = +\infty$ et $-3 * +\infty = -\infty$

Mais

$$\left(10^{100}\right)^2 \hookrightarrow +\infty$$
$$\frac{1}{\left(10^{100}\right)^2} \hookrightarrow 0$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\left(10^{100}\right)^2}}$$

$\hookrightarrow$ BOUM

Vers l'infini et au-delà !

Au delà de ces valeurs, l'ordinateur renvoie soit 0, soit $\pm\infty$.
C'est super ! $1 + \infty = +\infty$ et $-3 * +\infty = -\infty$

Mais

$$\left(10^{100}\right)^2 \hookrightarrow +\infty$$
$$\frac{1}{\left(10^{100}\right)^2} \hookrightarrow 0$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\left(10^{100}\right)^2}}$$

$\hookrightarrow$ BOUM

(en fait $\hookrightarrow +\infty$ mais le programme s'arrête sur "division by zero").

NaN !

Mais au fait, le processeur me renvoie toujours un résultat.
Si je calcule $\sqrt{-1}$ ou $+\infty - \infty$, j'obtiens quoi ?

NaN !

Mais au fait, le processeur me renvoie toujours un résultat.
Si je calcule $\sqrt{-1}$ ou $+\infty - \infty$, j'obtiens quoi ?

NaN

NaN !

Mais au fait, le processeur me renvoie toujours un résultat.
Si je calcule $\sqrt{-1}$ ou $+\infty - \infty$, j'obtiens quoi ?

NaN

Not-a-Number (pas un nombre)

NaN !

NaN apparaît aux endroits les plus incongrus :

NaN !

NaN apparaît aux endroits les plus incongrus :

NaN !

NaN apparaît aux endroits les plus incongrus :

NaN !

NaN apparaît aux endroits les plus incongrus :

NaN !

NaN apparaît aux endroits les plus incongrus :

Plan

Tout cela est terrible ! Que faire ?

Garanties possibles

Il existe diverses méthodes d'analyse des programmes numériques :

Garanties possibles

Il existe diverses méthodes d'analyse des programmes numériques :

- des méthodes « automatiques »
  (du type arithmétique d'intervalles, analyse statique...)

Garanties possibles

Il existe diverses méthodes d'analyse des programmes numériques :

- des méthodes « automatiques »
  (du type arithmétique d'intervalles, analyse statique...)
- des méthodes plus « fines » (analyse à la main de chaque ligne du programme pour voir que la ligne 7 correspond à un calcul exact).

Garanties possibles

Il existe diverses méthodes d'analyse des programmes numériques :

- des méthodes « automatiques »
  (du type arithmétique d'intervalles, analyse statique...)
- des méthodes plus « fines » (analyse à la main de chaque ligne du programme pour voir que la ligne 7 correspond à un calcul exact).

$\Rightarrow$ plein d'articles décrivant des algorithmes justes.

Garanties possibles

Il existe diverses méthodes d'analyse des programmes numériques :

- des méthodes « automatiques »
  (du type arithmétique d'intervalles, analyse statique...)
- des méthodes plus « fines » (analyse à la main de chaque ligne du programme pour voir que la ligne 7 correspond à un calcul exact).

$\Rightarrow$ plein d'articles décrivant des algorithmes justes.

Est-ce assez ?

Assez de garanties ?

Mais comment être vraiment sûr que ces techniques ne souffrent pas d'une erreur humaine ? C'est particulièrement sensible ici car

Assez de garanties ?

Mais comment être vraiment sûr que ces techniques ne souffrent pas d'une erreur humaine ? C'est particulièrement sensible ici car

- on a beaucoup de sous-cas différents
  (nombres très petits, très grands ou « normaux »).

Assez de garanties ?

Mais comment être vraiment sûr que ces techniques ne souffrent pas d'une erreur humaine ? C'est particulièrement sensible ici car

- on a beaucoup de sous-cas différents
  (nombres très petits, très grands ou « normaux »).
- le programme concerné peut être critique et tenir des vie humaines entre ses mains (chirurgie, avions. . .)

Assez de garanties ?

Mais comment être vraiment sûr que ces techniques ne souffrent pas d'une erreur humaine ? C'est particulièrement sensible ici car

- on a beaucoup de sous-cas différents
  (nombres très petits, très grands ou « normaux »).
- le programme concerné peut être critique et tenir des vie humaines entre ses mains (chirurgie, avions...)

Et pourtant, on a des articles avec erreurs
(dans la preuve ou même dans les algorithmes).

Que faire de plus ?

Garanties ?

C'est pour cela qu'on veut des preuves formelles :
on veut que les démonstrations soient vérifiées par ordinateur.

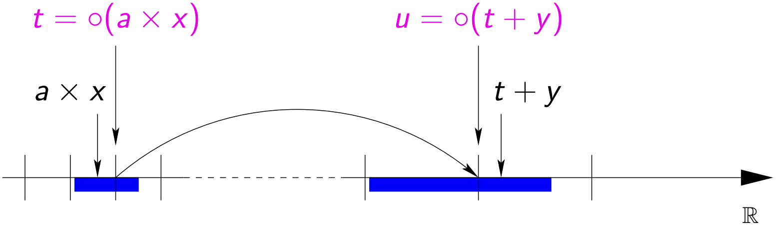
Garanties ?

C'est pour cela qu'on veut des preuves formelles :
on veut que les démonstrations soient vérifiées par ordinateur.

$\Rightarrow$ augmenter la confiance dans le programme

On va donc annoter un programme avec des propriétés *ad hoc*
(le résultat est à 3 % du résultat exact...)
On va ensuite la prouver en utilisant un assistant de preuves (Coq, PVS).
Ça représente (beaucoup) plus de travail qu'une preuve papier, mais c'est beaucoup plus sûr.

Exemple de propriété formellement prouvée : `u=y+a*x`



En base 2, si $3\,|a \times x| \lesssim |y|$ et $err(y) + err(a \times x) < \dfrac{2^{-p}}{6} \times |y|$,

le flottant renvoyé u est l'un des flottants encadrant le réel exact.

$\Rightarrow$ évaluation polynômiale fidèle par la méthode de Horner.
$\Rightarrow$ évaluation de fonctions élémentaires.

Conclusion

Les calculs sur ordinateur,

Conclusion

Les calculs sur ordinateur,

- c'est rapide,

Conclusion

Les calculs sur ordinateur,

- c'est rapide,
- mais ce n'est pas exact.

Conclusion

Les calculs sur ordinateur,

- c'est rapide,
- mais ce n'est pas exact.

Il faut donc

Conclusion

Les calculs sur ordinateur,

- c'est rapide,
- mais ce n'est pas exact.

Il faut donc

- garder un œil critique sur les réponses fournies,

Conclusion

Les calculs sur ordinateur,

- c'est rapide,
- mais ce n'est pas exact.

Il faut donc

- garder un œil critique sur les réponses fournies,
- ou attendre que votre programme favori soit validé (formellement).

Suggestions d'exercices. . .

Polynôme :

Calculer le polynôme de S. Rump :

$$f(a,b) = 333{,}65 b^6 + a^2(11a^2b^2 - b^6 - 121b^4 - 2) + 5{,}5b^8 + \frac{a}{2b}$$

pour $a = 77\ 617{,}0$ et $b = 33\ 096{,}0$

Polynôme :

Calculer le polynôme de S. Rump :

$$f(a,b) = 333{,}65b^6 + a^2(11a^2b^2 - b^6 - 121b^4 - 2) + 5{,}5b^8 + \frac{a}{2b}$$

pour $a = 77\ 617{,}0$ et $b = 33\ 096{,}0$

Votre ordinateur vous donne 1,172 603.

Polynôme :

Calculer le polynôme de S. Rump :

$$f(a,b) = 333{,}65b^6 + a^2(11a^2b^2 - b^6 - 121b^4 - 2) + 5{,}5b^8 + \frac{a}{2b}$$

pour $a = 77\ 617{,}0$ et $b = 33\ 096{,}0$

Votre ordinateur vous donne 1,172 603.

Alors que la vraie valeur est $-0{,}827\ 396$.

Il était une fois, dans une galaxie très très lointaine

Mon banquier m'a proposé cet investissement :

Il était une fois, dans une galaxie très très lointaine

Mon banquier m'a proposé cet investissement :

- vous me donnez $e \approx 2{,}718\ 28\ldots$ €,

Il était une fois, dans une galaxie très très lointaine

Mon banquier m'a proposé cet investissement :

- vous me donnez $e \approx 2{,}718\,28\ldots$ €,
- l'année suivante, je prends 1€ de frais et je multiplie par 1,

Il était une fois, dans une galaxie très très lointaine

Mon banquier m'a proposé cet investissement :

- vous me donnez $e \approx 2{,}718\,28\ldots$ €,
- l'année suivante, je prends 1€ de frais et je multiplie par 1,
- l'année suivante, je prends 1€ de frais et je multiplie par 2,

Il était une fois, dans une galaxie très très lointaine

Mon banquier m'a proposé cet investissement :

- vous me donnez $e \approx 2{,}718\,28\ldots$ €,
- l'année suivante, je prends 1€ de frais et je multiplie par 1,
- l'année suivante, je prends 1€ de frais et je multiplie par 2,
- l'année suivante, je prends 1€ de frais et je multiplie par 3,

Il était une fois, dans une galaxie très très lointaine

Mon banquier m'a proposé cet investissement :

- vous me donnez $e \approx 2{,}718\,28\ldots$ €,
- l'année suivante, je prends 1€ de frais et je multiplie par 1,
- l'année suivante, je prends 1€ de frais et je multiplie par 2,
- l'année suivante, je prends 1€ de frais et je multiplie par 3,
- ...
- après n ans, je prends 1€ de frais et je multiplie par n,

Il était une fois, dans une galaxie très très lointaine

Mon banquier m'a proposé cet investissement :

- vous me donnez $e \approx 2{,}718\,28\ldots$ €,
- l'année suivante, je prends 1€ de frais et je multiplie par 1,
- l'année suivante, je prends 1€ de frais et je multiplie par 2,
- l'année suivante, je prends 1€ de frais et je multiplie par 3,
- ...
- après n ans, je prends 1€ de frais et je multiplie par n,
- Pour récupérer mon argent, il y a 1€ de frais.

Il était une fois, dans une galaxie très très lointaine

Mon banquier m'a proposé cet investissement :

- vous me donnez $e \approx 2{,}718\,28\ldots$ €,
- l'année suivante, je prends 1€ de frais et je multiplie par 1,
- l'année suivante, je prends 1€ de frais et je multiplie par 2,
- l'année suivante, je prends 1€ de frais et je multiplie par 3,
- ...
- après n ans, je prends 1€ de frais et je multiplie par n,
- Pour récupérer mon argent, il y a 1€ de frais.

Dans 50 ans, pour ma retraite, combien d'argent aurai-je ?

Combien ?

Machine	Valeur

Combien ?

Machine	**Valeur**
HP-48S	$+2{,}903\,83 \quad 10^{52}$ €

$\Rightarrow$ Super !

Combien ?

Machine	**Valeur**	
HP-48S	$+2{,}903\ 83 \quad 10^{52}$ €	$\Rightarrow$ Super !
C (format `double`)	$-4{,}396\ 80 \quad 10^{48}$ €	$\Rightarrow$ Oups !

Combien ?

Machine	Valeur	
HP-48S	$+2{,}903\,83 \quad 10^{52}$ €	$\Rightarrow$ Super !
C (format `double`)	$-4{,}396\,80 \quad 10^{48}$ €	$\Rightarrow$ Oups !
C (format `float`)	$-\infty$	$\Rightarrow$ Oups ! ! ! !

Combien ?

Machine	Valeur		
HP-48S	$+2{,}903\,83$	10^{52} €	⇒ Super !
C (format `double`)	$-4{,}396\,80$	10^{48} €	⇒ Oups !
C (format `float`)	$-\infty$		⇒ Oups ! ! ! !
Maple (10 chiffres)	$-1{,}396\,14$	10^{55} €	
Maple (20 chiffres)	$+1{,}207\,82$	10^{45} €	⇒ Hein ?

Combien ?

Machine	Valeur	
HP-48S	$+2{,}903\,83 \quad 10^{52}$ €	$\Rightarrow$ Super !
C (format `double`)	$-4{,}396\,80 \quad 10^{48}$ €	$\Rightarrow$ Oups !
C (format `float`)	$-\infty$	$\Rightarrow$ Oups ! ! ! !
Maple (10 chiffres)	$-1{,}396\,14 \quad 10^{55}$ €	
Maple (20 chiffres)	$+1{,}207\,82 \quad 10^{45}$ €	$\Rightarrow$ Hein ?
Valeur exacte	$\approx 0{,}02$€	

Merci de votre attention.